Μάθημα 9ο

8/5/19

Μέτρα Συσχέτισης

X και Y ποσοτικές τμ.

Θεωρητικός Συντελεστής Συσχέτισης:

$$\rho = \rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{VarX \cdot VarY}}$$

$$Cov(X,Y) = E[(X-EX)(Y-EY)] = E(XY) - (EX)(EY)$$

$-1 \le \rho \le 1$

$\rho = 0 \rightsquigarrow$ X, Y ασυσχέτιστες γραμμικά

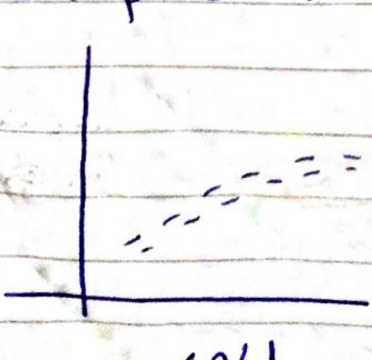
$\rho = \pm 1 \rightsquigarrow$ σχετίζονται τέλεια.

Για (x_i, y_i), $i=1,\dots,n$: Δειγματικός Συντελεστής συσχέτισης Pearson:

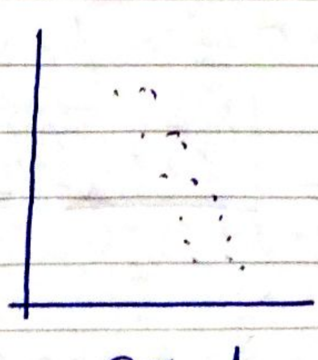
$$r = r(x,y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \sum_{i}^{n}(y_i-\bar{y})^2}} =$$

$$= \frac{\sum_i x_i y_i - \frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n}}{\sqrt{\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right)\left(\sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n}\right)}} \quad , -1 \le r \le 1$$

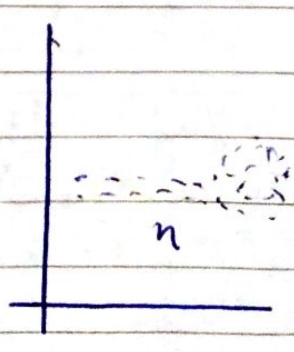
$H_0: \rho = 0$, $H_a: \rho \neq 0$



$r \approx 1$



$r \approx -1$



$r \approx 0$

$(X, Y) \sim$ κανονική τ.μ.

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \sim t_{n-2}$$

Συντελεστής Συσχέτισης του Spearman (r_s)

(x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$

$$r_s = \frac{\sum_1^n [R(x_i) - \overline{R(x)}][R(y_i) - \overline{R(y)}]}{\sqrt{\sum_1^n [R(x_i) - \overline{R(x)}]^2 \cdot \sum_1^n [R(y_i) - \overline{R(y)}]^2}} \quad , -1 \le r_s \le 1$$

$$= \frac{\sum_1^n R(x_i) R(y_i) - \frac{[\sum R(x_i)][\sum R(y_i)]}{n}}{\sqrt{\left[\sum_1^n (R(x_i))^2 - \frac{[\sum R(x_i)]^2}{n}\right]\left[\sum_1^n (R(y_i))^2 - \frac{[\sum R(y_i)]^2}{n}\right]}} \quad (1)$$

$R(x_i)$, $R(y_i)$ οι τάξεις των x_i, y_i μετρήσεων.

$$\overline{R(x)} = \overline{R(y)} = \frac{\sum_1^n R(x_i)}{n} = \frac{n(n+1)/2}{n} = \frac{n+1}{2}$$

Χωρίς ισοτιμίες:

Ισοδύναμα , $r_s = 1 - \dfrac{6\sum_1^n d_i^2}{n(n^2-1)}$

$$d_i = R(x_i) - R(y_i) \quad , \quad \left[\sum_1^n d_i = 0\right]$$

(από $\sum d_i^2 = \sum_1^n [R(x_i) - R(y_i)]^2 =$

$= \sum [R(x_i) - \overline{R(x)} + \overline{R(y)} - R(y_i)]^2 = \dots$)

Για ισοτιμία σχέση (1) κ $\sum_1^n [R(x_i) - \overline{R(x)}]^2 =$

$$= \frac{n(n^2-1) - \sum^{r} f_i(f_i^2-1)}{12}$$, r : σετ ισοτιμιών
f_i : συχνότητα

αντίστοιχα για y μετρήσεις
↳ δλδ αντικαθιστώ με αυτό όταν έχω ισοτιμίες

$-1 \leq r_s \leq 1$ και επίσης $t_s = \frac{r_s\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_s^2}} \overset{\text{προσ.}}{\underset{H_0}{\sim}} t_{n-2}$.

κρ. περιοχή $|r_s| \geq r_{a/2}$ (δίπλευρη) για $H_0 : \rho = 0$
$v\ H_a : \rho \neq 0$.

Παράδειγμα 3 (6.2 σελ. 113, Μπατσίδης)

Παράδειγμα 1 (7.10)

(8.2, 8.7), (9.6, 9.6), (7, 6.9), (9.4, 8.5), (10.9, 11.3)
(7.1, 7.6) , $n = 6$

$H_0 : \rho = 0 \quad v \quad H_a : \rho \neq 0$

x_i :	8.2	9.6	7	9.4	10.9	7.1
y_i :	8.7	9.6	6.9	8.5	11.3	7.6
$R(x_i)$:	3	5	1	4	6	2
$R(y_i)$:	4	5	1	3	6	2
d_i :	-1	0	0	1	0	0

$$r_s = 1 - 6\frac{\sum d_i^2}{n(n^2-1)} = 1 - 6\frac{(1+1)}{6(6^2-1)} = 0.94 \quad , n=6$$

$|r_s| = 0.94 > r_{0.025} = 0.886$, απορ. H_0

άρα υπάρχει σχέση των 2 οργάνων μέτρησης της πίεσης

Παράδειγμα 2

[Ελληνικά (x), Ιστορία (y)] :

(Β, Α), (Α, Β), (Γ, Γ), (Β, Γ), (Β, Β), (Δ, Ε), (Ε, Δ), (Γ, Γ)

↳ βαθμολογία $n=8$ μαθητών να ελεγχθεί αν οι επιδόσεις συσχετίζονται.

$H_0: \rho=0$ v $H_a: \rho \neq 0$

x_i:	Β	Α	Γ	Β	Β	Δ	Ε	Γ
y_i:	Α	Β	Γ	Γ	Β	Ε	Α	Γ
$R(x_i)$:	6	8	3.5	6	6	2	1	$3.5 = \frac{3+4}{2}$
$R(y_i)$:	8	6.5	4	4	6.5	1	2	4
d_i:	-2	1.5	-0.5	2	-0.5	1	-1	-0.5

$\Sigma d_i = 0$.

$$r_s = 1 - \frac{6 \Sigma d_i^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6 \cdot 13}{8(64-1)} = 0.845 > r_{0.025} = 0.738$$

απορ. H_0

Υπάρχει σχέση μεταξύ των 2 μαθημάτων.

Λόγω των ισοτιμιών:

$\Sigma R(x_i) R(y_i) = 195$

$\Sigma R(x_i) = R(y_i) = 36$

$f_1 = 3$, $f_2 = 2$, $g_1 = 3$, $g_2 = 2$

$$\sum_1^n [R(x_i) - \overline{R(x)}]^2 = \frac{n(n^2-1) - \Sigma f_i(f_i^2-1)}{12} = 39.5 =$$

$$= \sum_1^n [R(y_i) - \overline{R(y)}]^2$$

άρα $r_s = \dfrac{195 - \frac{36 \cdot 36}{8}}{\sqrt{39.5 \cdot 39.5}} = 0.835$ διορθωμένο σε σχέση με το προηγ. r_s.

$$t_s = \overset{0.845}{\underset{0.835}{r_s}} \sqrt{\frac{n-2}{1-r_s^2}} = \begin{cases} 3.871 \\ 3.717 \end{cases} > t_{0.025,6} = 2.447$$

απορ. H_0.

Δεν μας ενδιαφέρει ο έλεγχος t_s ο προσεγγιστικός - αρκεί να γράψω μόνο τον πρώτο.